

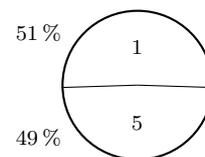
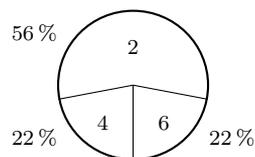
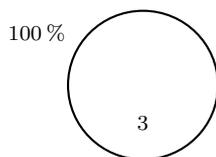


## 7. Tag der Mathematik

Aufgaben für die Jahrgangsstufen 11–12

### Aufgabe 1 (20 Punkte):

Es gibt folgende Glücksräder:



Das mittlere Glücksrad z. B. liefert also mit Wahrscheinlichkeit 56 % die 2, mit Wahrscheinlichkeit 22 % die 4 usw. Gewinner ist, wer die größte Zahl erreicht.

- Alice und Bob spielen gegeneinander, nachdem sie sich nacheinander verschiedene Glücksräder ausgesucht haben. Alice wählt zuerst. Welches Glücksrad sollte Alice wählen?
- Alice, Bob und Carol spielen gegeneinander, nachdem sie sich nacheinander verschiedene Glücksräder ausgesucht haben (nur die ersten beiden haben eine Wahl). Alice wählt zuerst. Welches Glücksrad sollte Alice wählen?

Begründen Sie Ihre Antworten durch Rechnungen.

Aufgabe 2 (20 Punkte):

Papa Schlumpf bereitet es große Freude seine 13 Lieblingsschlümpfe mit seltsamen Spielen zu unterhalten, die angeblich deren mathematische Fähigkeiten fördern sollen. Heute stellt er sie in einer Reihe auf, sodass jeder Schlumpf zwar alle Schlümpfe sehen kann, die vor ihm stehen, aber nicht diejenigen, die hinter ihm stehen. Umzudrehen wagt sich keiner, da für diesen Fall eine Woche Wii-Verbot angedroht wurde. Dann setzt er jedem seiner 13 Schlümpfe eine Mütze auf, die gelb oder lila ist. Dabei beginnt er hinten in der Reihe, sodass die Schlümpfe wieder nur sehen können, welche Farben die Mützen der vor ihnen stehenden Schlümpfe haben. Auch die Farbe der Mütze, die sie selbst tragen, können sie nicht sehen. Papa Schlumpf verrät jedoch so viel, dass er eine gerade Anzahl von lila Mützen verteilt hat. Nun beginnt Papa Schlumpf der Reihe nach alle Schlümpfe nach der Farbe ihrer Mütze zu befragen, wobei er wieder mit dem Letzten in der Reihe beginnt. Gibt der Schlumpf die richtige Antwort, so erhält er ein großes Eis, was zuverlässig einen Jubelschrei auslöst. Andernfalls ist nur ein leichtes Seufzen zu hören. Schlaubi Schlumpf steht genau in der Mitte der Reihe. Er sieht, dass genau drei der Schlümpfe in der Reihe vor ihm gelbe Mützen tragen. Zudem hört er, dass genau drei der hinter ihm stehenden Schlümpfe die Antwort gelb gegeben haben. Stutzig macht ihn, dass alle vor ihm Befragten gejubelt haben und kein Seufzer zu hören war. Er ahnt, dass das kein Zufall sein kann und denkt angestrengt nach, aber es will ihm nichts einfallen.

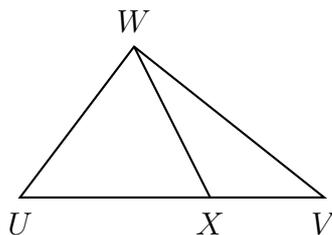
- (a) Helfen Sie Schlaubi und erklären Sie ihm, warum seine Mütze welche Farbe hat.

Schlaubi hat es vermasselt und muss ins B-Team, das auch aus 13 Schlümpfen besteht. Wieder steht er in der Mitte und Papa Schlumpf verteilt gelbe und lila Mützen, dieses Mal eine gerade Anzahl von gelben Mützen. Wieder sieht er genau drei gelbe Mützen vor sich und hört genau drei Mal die Antwort gelb, bevor er an der Reihe ist. Allerdings sind jetzt drei Jubelschreie und drei Seufzer zu hören. Das verwirrt Schlaubi so sehr, dass er vergisst, welche der Antworten zu Jubelschreien geführt haben.

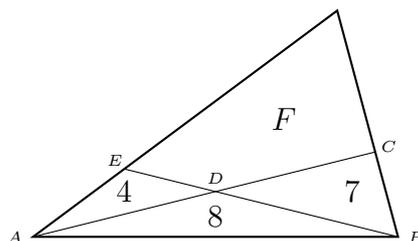
- (b) Kann Schlaubi trotzdem herausfinden, welche Farbe seine Mütze hat? Falls ja, welche Farbe hat sie? Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3 (20 Punkte):

Warum ist das Verhältnis der Flächen der Dreiecke  $\triangle(W, U, X)$  und  $\triangle(W, X, V)$  gleich dem Verhältnis der Längen der Strecken  $\overline{UX}$  und  $\overline{XV}$ ?



Ein Dreieck sei wie folgt in drei Dreiecke mit den Flächen 4, 7, 8 und ein Viereck der Fläche  $F$  unterteilt:



Berechnen Sie die Fläche  $F$ .

*Hinweis:* Für die Lösung der Aufgabe könnten die Streckenverhältnisse  $\overline{AD}$  zu  $\overline{DC}$  und  $\overline{BD}$  zu  $\overline{DE}$  von Bedeutung sein.

Aufgabe 4 (20 Punkte):

Justitia findet auf dem Dachboden ihres Großvaters eine alte Balkenwaage. Auf der Verpackung steht folgende Produktbeschreibung:

*„Balkenwaage mit vier Gewichten, um alle ganzzahligen Gewichte 1 g, 2 g, ..., 40 g in einer Wägung abzuwiegen.“*

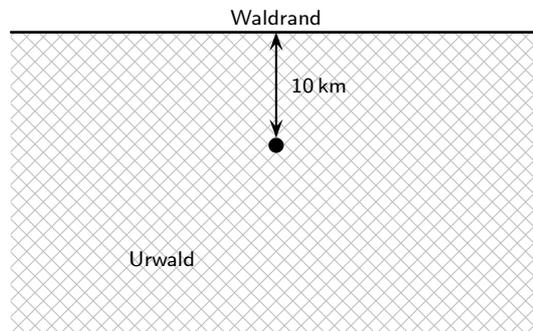
Allerdings findet Justitia nur drei dieser vier Gewichte, mit denen es aber immerhin möglich ist, alle ganzzahligen Gewichte 1 g, 2 g, ..., 13 g in einer Wägung abzuwiegen (eine Balkenwaage hat zwei Waagschalen, auf beide können Gewichte gelegt werden).

- Welche drei Gewichte hat Justitia gefunden?
- Was ist die kleinste Zahl von Gewichten, die ausreicht, um alle ganzzahligen Gewichte 1 g, 2 g, ..., 1000 g in einer Wägung abwiegen zu können?
- Angenommen Justitia hätte zwei gleiche Sätze von je drei verschiedenen Gewichten zur Verfügung. Welche Gewichte sollten in einem Satz vorhanden sein, sodass sie für ein möglichst großes  $N$  alle Gewichte 1 g, 2 g, ...,  $N$  g in einer Wägung abwiegen kann? Wie groß ist  $N$  dann?

Hier ist kein Lösungsweg verlangt. Tragen Sie nur Ihre Ergebnisse ins Lösungsblatt ein.

Aufgabe 5 (20 Punkte):

Mowgli hat sich in seinem Abenteuerurlaub „Trekking im Amazonasgebiet“ im dichten Urwald verlaufen (er ist halt schon lange unter den Menschen und es ist ja auch nicht „sein“ Dschungel). Glücklicherweise trifft er einen Eingeborenen, den er nach dem Weg aus dem Wald fragt. Die Verständigung fällt schwer, aber der Eingeborene skizziert mit einem Stock in den Sandboden ein Bild, das übersetzt etwa so aussieht:



Der Waldrand ist also 10 km von Mowgli entfernt und verläuft entlang einer Geraden (es schließt sich eine Kakao-Plantage an). Auf Mowglis Frage, in welcher Richtung der Waldrand liegt, zuckt sein Gegenüber nur verständnislos mit den Schultern und geht seines Weges. Mowgli fragt sich, wie er je den Weg aus dem Urwald finden soll. Dazu kommt noch, dass er sich mit den hiesigen Dschungelfrüchten nicht auskennt – er will kein Risiko eingehen, sich zu vergiften – und in seinem Rucksack hat er nur noch Verpflegung für eine Wegstrecke von etwa 80 km.

Finden Sie für Mowgli einen möglichst kurzen Ausweg, das ist ein Weg, der ihn sicher zum Waldrand führt, unabhängig davon, in welcher Richtung dieser liegt. Berechnen Sie die Länge  $L$  Ihres Weges. Für einen Ausweg, der nicht länger als 80 km ist, erhalten Sie  $(84 - L/\text{km})$  Punkte.

(Der kürzeste Ausweg ist knapp 64 km lang, es sind also maximal 20 Punkte zu holen.)