UNIVERSITÄT BAYREUTH

Mathematisches Institut
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik

7. Tag der Mathematik

Aufgaben für die Jahrgangsstufen 7–8

Aufgabe 1 (15 Punkte):
Markus und Jan sehen auf dem Heimweg vom Kinofilm „21“ zwei Autos mit den amtlichen Kennzeichen

BT – XY 21 und BT – XY 63

Dabei fällt ihnen sofort auf, dass die Zahlen 21 und 63 eine gemeinsame Eigenschaft haben: Sie sind 7-mal so groß wie ihre Quersumme. Markus behauptet, dass dies die einzigen beiden zweistelligen Zahlen mit dieser Eigenschaft sind.

(a) Hat Markus recht? Gebt alle zweistelligen Zahlen an, die 7-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

Jan bemerkt, dass es jedoch keine zweistelligen Zahlen geben kann, die 19-mal so groß sind wie ihre Quersumme. Die beiden Freunde fragen sich nun, ob es dreistellige Zahlen gibt, die diese Bedingung erfüllen.

(b) Gebt alle dreistelligen Zahlen an, die 19-mal so groß sind wie ihre Quersumme.

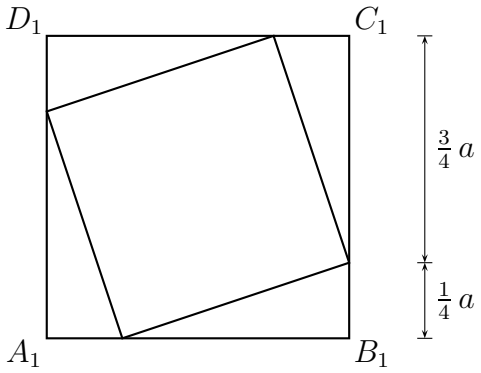
Aufgabe 2 (15 Punkte):

Bauer Schlepp hat 54 kg Erdbeeren geerntet, die er nun nach Hause bringen will. Leider ist seinem Traktor der Biodiesel ausgegangen und er muss den weiten Weg zur Tankstelle zu Fuß zurücklegen. Als er nach 4 Stunden zurückkehrt, sieht er zu seinem Entsetzen, dass er vergessen hat, die Erdbeeren in den Schatten zu stellen. In der prallen Sonne hat sich ihr Wassergehalt von 90 Prozent auf 85 Prozent reduziert.

Wie schwer sind die geernteten Erdbeeren bei seiner Rückkehr?
Bitte tragt auf dem Lösungsbogen nur euer Ergebnis ein.

Aufgabe 3 (15 Punkte):

In ein Quadrat $A_1B_1C_1D_1$ mit Seitenlänge a wird ein weiteres Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ gezeichnet, dessen Ecken die Seiten von $A_1B_1C_1D_1$ im Verhältnis 1:3 teilen.



(a) Berechnet den Flächeninhalt des Quadrats $A_2B_2C_2D_2$.

Auf gleiche Weise entstehen die Quadrate $A_3B_3C_3D_3$ aus $A_2B_2C_2D_2$, $A_4B_4C_4D_4$ aus $A_3B_3C_3D_3$ usw. Wir bezeichnen die Seitenlänge von $A_2B_2C_2D_2$ mit b.

(b) Gebt eine Formel für den Flächeninhalt des Quadrats $A_3B_3C_3D_3$ zunächst in Abhängigkeit von b und dann in Abhängigkeit von a an.

(c) Ab welchem Quadrat ist der Flächeninhalt kleiner als ein Viertel der Fläche des ersten Quadrats $A_1B_1C_1D_1$? Begründet eure Antwort.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Gegeben sei die Gleichung

$$n^2 - 5 = p + 4.$$

Dabei seien n eine natürliche Zahl und p eine Primzahl.

(a) Gebt ein Zahlenpaar (n, p) an, das die Gleichung erfüllt.

(b) Gibt es noch weitere Zahlenpaare? Begründet eure Antwort.

Erinnnerung: Eine natürliche Zahl größer gleich zwei wird Primzahl genannt, wenn sie nur durch eins und durch sich selbst ohne Rest teilbar ist.

Aufgabe 5 (20 Punkte):

Ron, Harry und Draco befinden sich mit ihrem Lehrer Severus in der Schulturnhalle, welche einen quadratischen Grundriss besitzt mit einer Seitenlänge von 35 Metern. Jede der vier Seitenwände wurde von Albus mit einer anderen Farbe bemalt. Harry muss eine Position einnehmen, die von der roten Wand 1 Meter und von der grünen Wand 1,5 Meter entfernt ist, während Ron den exakt gleichen Abstand von 4 Metern von der roten wie von der grünen Wand einhalten muss.

(a) Übertragt die Situation in ein Koordinatensystem mit geeignetem Maßstab. Dabei können beispielsweise die x-Achse der roten und die y-Achse der grünen Wand entsprechen. Markiert anschließend die Positionen von Ron und Harry mit R bzw. H.

(b) Spiegelt den Koordinatenpunkt R von Ron an der roten Achse und bezeichnet den gespiegelten Punkt mit R'. Zeichnet dann den kürzesten Weg zwischen H und R' ein.

Draco hat nun die Aufgabe auf dem Boden der Turnhalle den kürzesten Weg zwischen Harry und Ron zu markieren. Diese Aufgabe erscheint Severus als zu einfach. Er stellt die Zusatzbedingung, dass der Weg die rote Wand in genau einem Punkt berühren muss.

(c) Wie weit ist dieser Punkt von der grünen Wand entfernt? Begründet eure Antwort.

Draco schafft es, diese Aufgabe zu lösen, indem er, von Severus unbemerkt, einen Spiegel herbeizaubert. Severus verleiht ihm für die Lösung 10 Bonuspunkte. Die Lehrerin Minerva, die zusammen mit ihrer Musterschülerin Hermine hinzukommt, findet diese Punkte viel zu leicht verdient. Sie setzt 20 Bonuspunkte für den kürzesten Weg zwischen Harry und Ron aus (die sich zwischenzeitlich nicht bewegen durften), der sowohl die grüne als auch die rote Wand in genau einem Punkt berührt. Hermine kassiert die Bonuspunkte, bevor die drei Jungs überhaupt zum Nachdenken kommen.

(d) Wie weit ist der Punkt, in dem Hermines Weg die rote Wand berührt, von der grünen Wand entfernt?